Épreuve anticipée de mathématiques

Voie générale : enseignement de spécialité mathématiques

Sujet d'entraînement avancé n° 2

Durée : 2 heures • L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Première partie : Automatismes — QCM (6 points)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Aucune justification n'est demandée.

Question 1. On sait que $\mathrm{e}^{a} = 3$. La valeur de e^{2a+1} est :

A. $9\,\mathrm{e}$ **B.** 7 **C.** $6\,\mathrm{e}$ **D.** 10

Question 2. La valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ est :

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $-\dfrac{1}{2}$ **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Question 3. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -3$. La valeur de u_{10} est :

A. -25 **B.** -30 **C.** 35 **D.** -28

Question 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^3$. La fonction dérivée f' est définie par :

A. $3(2x-1)^2$ **B.** $6(2x-1)^2$ **C.** $6(2x-1)$ **D.** $2(2x-1)^3$

Question 5. On lance un dé truqué. La variable aléatoire X prend les valeurs -2, 0 et 3 avec les probabilités respectives $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{6}$. L'espérance $\mathbb{E}(X)$ vaut :

A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{3}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** -1

Question 6. Le discriminant du trinôme $2x^2 + 3x - 2$ vaut :

A. 7 **B.** 25 **C.** -7 **D.** 1

Question 7. Dans un repère orthonormé, un vecteur normal à la droite d'équation $2x - 3y + 6 = 0$ est :

A. $(2;\,-3)$ **B.** $(3;\,2)$ **C.** $(-3;\,2)$ **D.** $(2;\,3)$

Question 8. Un capital de 1 000 € augmente de 5 % par an. Au bout de n années, il vaut :

A. $1000 + 50n$ **B.** $1000 \times 1{,}05^n$ **C.** $1000 \times 0{,}95^n$ **D.** $1050n$

Question 9. Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB = 3$ et $AC = 4$. Le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ vaut :

A. 0 **B.** 9 **C.** 12 **D.** 25

Question 10. On considère $g(x) = x^3 - 3x + 1$. Sur l'intervalle $[0; 2]$, la fonction g admet :

A. un maximum en $x = 1$ **B.** un minimum en $x = 1$
C. aucun extremum **D.** un maximum en $x = 0$

Question 11. L'équation $\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{4}$ a pour solution :

A. $x = \dfrac{4}{3}$ **B.** $x = 4$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = 1$

Question 12. La forme canonique de $f(x) = x^2 - 6x + 5$ est :

A. $(x-3)^2 - 4$ **B.** $(x-3)^2 + 4$
C. $(x-6)^2 - 31$ **D.** $(x-3)^2 - 9$

Deuxième partie (14 points)

Exercice 1 : La spirale des carrés (7 points)

On considère un carré $ABCD$ de côté 1 dans un repère orthonormé, avec $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$ et $D(0;1)$.

Soit t un réel tel que $0 < t < 1$. On place les points :

— A' sur $[AB]$ tel que $AA' = t$, B' sur $[BC]$ tel que $BB' = t$,
— C' sur $[CD]$ tel que $CC' = t$, D' sur $[DA]$ tel que $DD' = t$.

1. Justifier que $A'(t\,;\,0)$, $B'(1\,;\,t)$, $C'(1-t\,;\,1)$ et $D'(0\,;\,1-t)$.
2. **On va montrer que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré.**
   a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$.
   b. Calculer $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{B'C'}$ et en déduire que $(A'B')$ et $(B'C')$ sont perpendiculaires.
   c. Montrer que $A'B' = B'C'$ et conclure.
3. **On étudie l'aire du carré intérieur en fonction de t.**
   a. Montrer que l'aire du carré $A'B'C'D'$ vaut $\mathcal{A}(t) = 2t^2 - 2t + 1$.
   b. Écrire $\mathcal{A}(t)$ sous la forme $2(t-\alpha)^2 + \beta$, où α et β sont à déterminer.
   c. En déduire la valeur de t pour laquelle l'aire du carré intérieur est minimale, et donner cette aire.
4. **On itère le procédé.**
   On répète la construction : à partir du carré $A'B'C'D'$, on construit un nouveau carré intérieur avec le même paramètre t, et ainsi de suite. On note $\mathcal{A}_n$ l'aire du carré obtenu à l'étape n, avec $\mathcal{A}_0 = 1$.
   a. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}(t) \times \mathcal{A}_n$.
   b. En déduire que $(\mathcal{A}_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   c. Exprimer $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_{n-1}$ en fonction de n et t.
5. **Application pour $t = \dfrac{1}{2}$.**
   a. Que représente géométriquement le point A' lorsque $t = \dfrac{1}{2}$?
   b. Calculer la raison de la suite $(\mathcal{A}_n)$ dans ce cas.
   c. Calculer $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$.

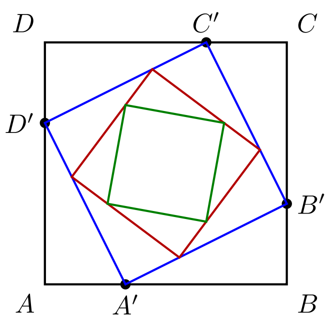

Illustration pour $t = \frac{1}{3}$.

Exercice 2 : Fiabilité d'un test de dépistage (7 points)

On considère un test de dépistage pour une maladie. On note :

— M : « la personne est malade » et $\overline{M}$: « la personne est saine »,
— T : « le test est positif » et $\overline{T}$: « le test est négatif ».

Le test a les caractéristiques suivantes : si la personne est malade, le test est positif avec une probabilité $\dfrac{9}{10}$; si la personne est saine, le test est négatif avec une probabilité $\dfrac{9}{10}$.

Partie A : Le cas d'une maladie rare

On suppose que la maladie touche 5 % de la population, c'est-à-dire $\mathbb{P}(M) = \dfrac{1}{20}$.

1. Traduire les données de l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $\mathbb{P}(T) = \dfrac{7}{50}$.
3. Calculer $\mathbb{P}_T(M)$, la probabilité qu'une personne soit réellement malade sachant que son test est positif.
4. Interpréter ce résultat : est-il surprenant ?

Partie B : Influence de la prévalence

On note désormais $p = \mathbb{P}(M)$ la prévalence de la maladie, avec $0 < p < 1$. On admet que la probabilité d'être malade sachant un test positif s'exprime par :

$$f(p) = \frac{9p}{8p+1}.$$

5. Retrouver le résultat de la question **3.** en vérifiant que $f\left(\dfrac{1}{20}\right) = \dfrac{9}{28}$.
6. **a.** Montrer que pour tout $p \in]0;1[$:

$$f'(p) = \frac{9}{(8p+1)^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de f.

Que peut-on dire, en termes concrets, du lien entre la prévalence d'une maladie et la fiabilité d'un test positif ?

7. On cherche à partir de quelle prévalence un résultat positif donne au moins une chance sur deux d'être réellement malade.

a. Résoudre l'équation $f(p) = \dfrac{1}{2}$.
b. Interpréter le résultat dans le contexte du problème.

Fin du sujet.