ÉPREUVE ANTICIPÉE DE MATHÉMATIQUES

Voie générale : enseignement de spécialité mathématiques

Sujet d'entraînement avancé

Durée : 2 heures • L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Première partie : Automatismes — QCM (6 points)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Aucune justification n'est demandée.

Question 1. On sait que $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ et $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$. La valeur de $\sin\theta$ est :

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Question 2. Le nombre de solutions réelles de l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ est :

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Question 3. Un article coûte 72 € après une réduction de 40 %. Son prix initial était de :

A. 100,80 € **B.** 112 € **C.** 120 € **D.** 180 €

Question 4. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ vaut :

A. 0 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Question 5. On pose $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (w_n) définie par $w_n = u_{n+1} - u_n$ est :

A. constante, égale à 2 **B.** arithmétique de raison 2
C. géométrique de raison 2 **D.** ni arithmétique, ni géométrique

Question 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$. Le nombre dérivé $f'(0)$ vaut :

A. 0 **B.** 1 **C.** e **D.** 2

Question 7. Deux événements A et B vérifient $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$. On peut affirmer que :

A. A et B sont incompatibles **B.** A et B sont indépendants
C. $P_A(B) = 0{,}4$ **D.** $P(A \cup B) = 0{,}7$

Question 8. La solution de l'équation $\mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e}^{5-x}$ est :

A. $x = 2$ **B.** $x = \dfrac{4}{3}$ **C.** $x = -\dfrac{4}{3}$ **D.** $x = 6$

Question 9. On donne $A(1;3)$, $B(5;7)$ et $D(3;1)$. Le point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme a pour coordonnées :

A. $(7;\ 5)$ **B.** $(-1;\ -3)$ **C.** $(9;\ 9)$ **D.** $(3;\ 5)$

Question 10. Soit f une fonction dérivable sur $[-3\,;\,5]$ qui admet un maximum en $x = 2$. On peut affirmer que :

A. $f'(2) = 0$ **B.** $f(2) = 0$

C. $f'(2) > 0$ **D.** f est croissante sur $[-3\,;\,2]$

Question 11. La somme $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$ vaut :

A. 121 **B.** 243 **C.** 363 **D.** 81

Question 12. La somme $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \dfrac{1}{4\times 5}$ vaut :

A. $\dfrac{1}{5}$ **B.** $\dfrac{4}{5}$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{1}{120}$

Indication : on pourra utiliser l'identité suivante : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

Deuxième partie (14 points)

Exercice 1 : Tangentes à une parabole (7 points)

On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $M_t\big(t,\, t^2\big)$ le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse t.

a. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$.

b. En déduire que la tangente $\mathcal{T}_t$ à $\mathcal{P}$ au point M_t a pour équation :

$$y = 2t\,x - t^2.$$

2. On considère un réel $a < 0$ et le point $P(0;\, a)$, situé sous la parabole. On cherche les tangentes à $\mathcal{P}$ passant par P.

a. Montrer que la tangente $\mathcal{T}_t$ passe par P si et seulement si $t^2 = -a$.

b. En déduire qu'il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{P}$ passant par P, et préciser les abscisses des deux points de tangence.

c. Exprimer en fonction de a les coordonnées des points de tangence A et B correspondant aux abscisses trouvées précédemment.

3. Angle entre les deux tangentes.

a. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{T}_A$ et un vecteur directeur $\vec{v}$ de $\mathcal{T}_B$.

b. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de a.

c. Pour quelle valeur de a les deux tangentes sont-elles perpendiculaires ?

4. Application numérique. On prend $a = -1$.

a. Donner les coordonnées de A, B et P.

b. Calculer $\cos\alpha$, où α est l'angle formé par les deux tangentes au point P.

On rappelle que $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$.

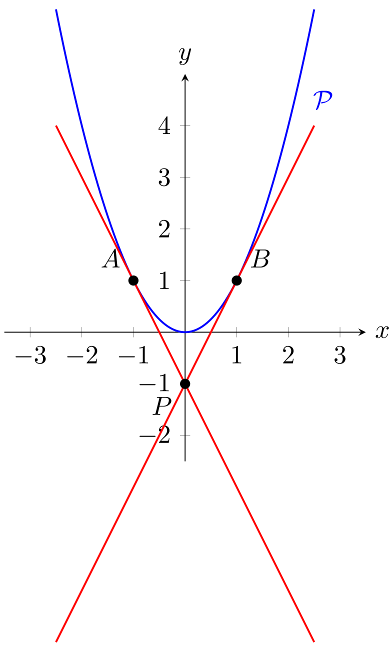


Figure pour $a = -1$.

Exercice 2 : Fiabilité d'une machine (7 points)

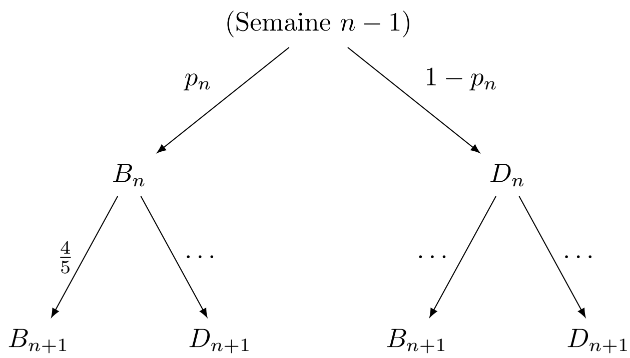
Une machine de production est contrôlée chaque lundi. À la semaine n, elle est soit en bon état (B_n), soit déréglée (D_n). On modélise son évolution par les règles suivantes :

- Si elle est en bon état une semaine donnée, elle a une probabilité $\frac{1}{5}$ d'être déréglée la semaine suivante.
- Si elle est déréglée une semaine donnée, elle a une probabilité $\frac{3}{5}$ d'être remise en bon état la semaine suivante.

On note p_n la probabilité que la machine soit en bon état à la semaine n. On suppose $p_0 = 1$ (la machine est neuve).

Partie A : Modèle discret

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous, modélisant le passage de la semaine n à la semaine $n+1$.



2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.$$

3. Calculer p_1 et p_2.

4. On pose $v_n = p_n - \frac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

5. La suite (p_n) est-elle monotone ? Vers quelle valeur semble-t-elle se stabiliser ? Interpréter dans le contexte.

Partie B : Modèle continu

Pour affiner l'étude, on cherche à modéliser la probabilité de bon fonctionnement en temps continu par une fonction de la forme :

$$f(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-kt} \qquad \text{pour } t \geqslant 0,$$

où k est un réel strictement positif à déterminer.

On dispose du tableau de valeurs approchées suivant.

x	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
e^{-x}	0,670	0,607	0,549	0,449	0,368	0,301	0,247	0,202	0,165	0,135

6. Vérifier que $f(0) = p_0$, et ce quelle que soit la valeur de k.

7. Détermination du paramètre k. On souhaite que les modèles discret et continu coïncident à la semaine $t = 1$.

a. Montrer que la condition $f(1) = p_1$ équivaut à $\mathrm{e}^{-k} = \dfrac{1}{5}$.

b. À l'aide du tableau, donner une valeur approchée de k à 0,1 près.

Dans toute la suite, on admet que $k = 1{,}6$.

8. Calculer $f'(t)$ et en déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

9. Justifier que pour tout $t \geqslant 0$, on a $f(t) \geqslant \dfrac{3}{4}$. Interpréter dans le contexte de la fiabilité.

10. Seuil de fiabilité. Le service de maintenance souhaite intervenir avant que la probabilité de bon fonctionnement ne descende sous 0,85. On note t_1 l'unique réel positif tel que $f(t_1) = 0{,}85$.

a. Justifier l'existence et l'unicité de t_1.

b. Montrer que la condition $f(t) = 0{,}85$ équivaut à $\mathrm{e}^{-kt} = \dfrac{2}{5}$.

c. À l'aide du tableau, donner un encadrement de kt_1 à 0,2 près.

d. En déduire un encadrement de t_1.

Fin du sujet.